

PRINCIPES
MATHÉMATIQUES

DE LA

PHILOSOPHIE NATURELLE,

Par feu Madame la Marquise DU CHASTELLET.

TOME PREMIER.



A PARIS,

Chez } DESAINT & SAILLANT, rue S. Jean de Beauvais,
LAMBERT, rue ^{ET} & à côté de la Comédie Française,
au Parnasse.

M. D. C. C. LVI.

AVEC APPROBATION, ET PRIVILEGE DU ROI.



sans cesse, limites dont elles peuvent toujours approcher plus près que d'aucune différence donnée, qu'elles ne peuvent jamais passer, & qu'elles ne sauroient atteindre, si ce n'est dans l'infini.

LIVRE
PREMIER.

On comprendra ceci plus clairement dans les quantités infiniment grandes. Si deux quantités, dont la différence est donnée, augmentent à l'infini, leur dernière raison sera donnée, & sera certainement la raison d'égalité; cependant les dernières, ou les plus grandes quantités auxquelles répond cette raison, ne seront point des quantités données. Donc, lorsque je me servirai dans la suite, pour être plus clair, des mots de *quantités évanouissantes*, de *quantités dernières*, de *quantités très petites*, il ne faut pas entendre par ces expressions des quantités d'une grandeur déterminée, mais toujours des quantités qui diminuent à l'infini.

SECONDE SECTION.

De la recherche des forces centripètes.

PROPOSITION I. THÉOREME I.

*Dans les mouvemens curvilignes des corps, les aires décrites * autour d'un centre immobile, sont dans un même plan immobile, & sont proportionnelles au temps.*

Supposé que le temps soit divisé en parties égales, & que dans la première partie de ce temps, le corps, par la force qui lui a été imprimée, décrive la ligne AB : suivant la première loi du mouvement dans un second temps égal au premier, il décrirait, si rien ne l'en empêchoit, la droite $BC = AB$; Donc en tirant au centre S , les rayons AS , BS , & CS , les aires ASB , $BS C$ seroient égales. Supposé que lorsque ce corps est arrivé en B , la force

Fig. 13.

* Les aires décrites par un corps autour d'un centre sont les espaces terminés par les rayons qui partent de ce centre, & par l'arc sur lequel s'appuient ces rayons.

centripete agisse sur lui par un seul coup, mais assez puissant pour l'obliger à se détourner de la droite Bc & à suivre la droite BC . Si on tire la ligne Cc parallèle à BS , laquelle rencontre BC en C , à la fin de ce second temps, le corps (selon le 1. Corollaire des loix) sera en C dans le même plan que le triangle ASB .

En tirant ensuite la ligne SC , le triangle $SB C$ sera égal au triangle $SB c$, à cause des parallèles SB , Cc , donc il sera aussi égal au triangle SAB .

De même, si la force centripete agit successivement sur le corps en C , D , E , &c. & qu'elle lui fasse décrire à chaque petite portion de temps les droites CD , DE , EF , &c. ces lignes seront toutes dans le même plan; & le triangle SCD sera égal au triangle $SB C$, le triangle SDE au triangle SCD , & le triangle SEF au triangle SDE . Ce corps décrira donc en des temps égaux des aires égales dans un plan immobile: & en composant, les sommes des aires quelconques $SADS$, $SAFS$ seront entr'elles comme les temps employés à les décrire.

Qu'on imagine maintenant que le nombre des triangles augmente & que leur largeur diminue à l'infini; il est clair (par le Cor. 4. du Lemme 3.) que leur dernier périmètre ADF , sera une ligne courbe. Donc la force centripete, qui retire le corps à tout moment de la tangente de cette courbe, agit sans interruption, & les aires quelconques $SADS$, $SAFS$, qui étoient proportionnelles aux temps employés à les décrire, leur seront encore proportionnelles dans ce cas. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. La vitesse d'un corps attiré vers un centre immobile dans un espace non résistant, est réciproquement comme la perpendiculaire tirée de ce centre à la ligne qui touche la courbe au lieu où le corps se trouve; car la vitesse de ce corps aux lieux A , B , C , D , E , est proportionnelle aux bases AB , BC , CD , DE , EF des triangles égaux; & ces bases sont entr'elles en raison réciproque des perpendiculaires qui leur sont abaissées du centre.

Cor. 2. Si on fait un parallélogramme $ABCV$, sur les cordes AB , BC , de deux arcs successivement parcourus par le même corps en des temps égaux dans des espaces non résistans, & que la diagonale BV de ce parallélogramme ait la même position que celle qu'elle a à la fin, lorsque ces arcs diminuent l'infini, cette diagonale prolongée passera par le centre des forces.

Cor. 3. Si on fait les parallélogrammes $ABCV$, $DEFZ$, sur les cordes AB , BC & DE , EF des arcs décrits en temps égaux dans des espaces non résistans, les forces en B & en E seront entr'elles dans la dernière raison des diagonales BV , EZ , lorsque ces arcs diminueront à l'infini; car les mouvemens du corps, suivant les lignes BC & EF , sont composés (par le Cor. 1. des loix) des mouvemens suivant les lignes Bc , BV & Ef , EZ : or, BV & EZ , qui sont égales à Cc , & à Ff , ont été parcourues par les impulsions de la force centripète en B & en E , selon ce qui a été démontré dans cette proposition; donc elles sont proportionnelles à ces impulsions.

Cor. 4. Les forces par lesquelles les corps, qui se meuvent dans des espaces libres, sont détournés du mouvement rectiligne & contraints à décrire des courbes, sont entr'elles comme les flèches des arcs évanouissans parcourus en temps égaux, & ces flèches convergent vers le centre des forces, & coupent les cordes des arcs évanouissans en deux parties égales; car ces flèches sont la moitié des diagonales dont on vient de parler dans le Cor. 3.

Cor. 5. Ainsi ces mêmes forces sont à la force de la gravité, comme les flèches des arcs décrits sont aux flèches verticales des arcs paraboliques que les projectiles décrivent dans le même temps.

Cor. 6. Tout ce qui a été démontré jusqu'ici sera encore vrai, par le Cor. 5. des loix, lorsque les plans dans lesquels les corps se meuvent, & les centres des forces placés dans ces plans, au lieu d'être en repos, se mouveront uniformément en ligne droite.

La force centripète d'un corps qui se meut dans une ligne courbe décrite sur un plan, & qui parcourt autour d'un point immobile, ou mû uniformément en ligne droite, des aires proportionnelles au temps, tend nécessairement à ce point.

Cas 1. Tout corps qui se meut dans une courbe est détourné du mouvement rectiligne par une force qui agit sur lui, par la première loi; & cette force qui contraint le corps à se détourner de la ligne droite, & à décrire en temps égaux les petits triangles égaux SAB , SBC , SCD , &c. autour du point immobile S , agit au lieu B suivant une ligne parallèle à cC , par la seconde loi, c'est-à-dire, suivant la ligne BS ; & au lieu C suivant une ligne parallèle à dD , c'est-à-dire suivant la ligne SC , &c. Elle agit donc toujours selon des lignes qui tendent à ce point immobile S . *C. Q. F. D.*

Cas. 2. Et par le Corollaire 5. des loix, le mouvement du corps est le même, soit que la superficie dans laquelle s'exécute ce mouvement soit en repos, soit qu'elle se meuve uniformément en ligne droite en emportant avec elle le centre, la courbe décrite, & le corps décrivant.

Cor. 1. Dans les espaces ou milieux non résistans, si les aires ne sont pas proportionnelles au temps, les forces centripètes ne tendent pas au concours des rayons; mais elles déclinent vers le côté vers lequel le corps se meut si la description des aires est accélérée; & elles déclinent vers le côté opposé si elle est retardée.

Cor. 2. Dans les milieux résistans, si la description des aires est accélérée, les directions des forces déclinent aussi vers le côté vers lequel le mouvement du corps est dirigé.

S C H O L I E.

Le corps peut être animé par une force centripète composée de plusieurs forces. Dans ce cas, le sens de la Proposition précé-

dente est, que la force qui résulte de toutes les autres tend au point *S*. De plus, si quelqu'autre force agit continuellement selon une ligne perpendiculaire à la superficie décrite, le corps se détournera du plan de son mouvement; mais la quantité de la superficie décrite n'augmentera ni ne diminuera, ainsi on peut la négliger dans la composition des forces.

PROPOSITION III. THÉOREME III.

Si un corps décrit autour d'un autre corps qui se meut d'une façon quelconque des aires proportionnelles au temps, la force qui anime le premier est composée d'une force qui tend vers le second, & de toute la force accélératrice par laquelle ce second corps est animé.

Soit le premier corps *L* & le second *T*: Si une force nouvelle égale & contraire à celle qui agit sur le corps *T*, agit sur ces deux corps, selon des lignes parallèles, le premier corps *L* continuera, par le Cor. 6. des loix, à décrire autour du corps *T* les mêmes aires qu'auparavant; mais la force qui agissoit sur le corps *T* sera détruite par cette nouvelle force qu'on a supposé lui être égale & contraire. Donc, par la première loi, ce corps *T* abandonné à lui-même demeurera en repos, ou se mouvra uniformément en ligne droite; & le corps *L*, qui est animé alors par la différence de ces forces, c'est-à-dire par la force restante, continuera à décrire des aires proportionnelles au temps autour du corps *T*. Donc par le Théor. 2. la différence de ces forces tend vers le corps *T* comme à son centre. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Il suit de-là, que si un corps *L* décrit autour d'un autre corps des aires proportionnelles au temps, & que de la force totale qui presse le corps *L*, soit simple, soit composée de plusieurs forces, selon le Cor. 2. des loix, on soustrait toute la force accélératrice qui agit sur l'autre corps; la force restante par laquelle le corps *L* est animé, tendra tout entière vers l'autre corps *T* comme centre.

Cor. 2. Et si ces aires ne s'éloignent pas beaucoup d'être pro-

portionnelles au temps, la force restante sera à peu près dirigée vers le corps T .

Cor. 3. Et réciproquement, si la force restante tend à peu près vers le corps T , les aires seront à peu près proportionnelles au temps.

Cor. 4. Si le corps L décrit autour du corps T des aires qui s'éloignent beaucoup de la proportionnalité des temps, & que ce corps T soit en repos, ou qu'il se meuve uniformément en ligne droite, la force centripète qui tend vers ce corps est nulle, ou bien elle est mêlée & composée avec d'autres forces très puissantes; & la force totale, composée de toutes ces forces, s'il y en a plusieurs, sera dirigée vers un autre centre mobile ou immobile. Il en est de même, lorsque le corps T se meut d'un mouvement quelconque, pourvu que l'on prenne pour force centripète, celle qui reste après qu'on a soustrait la force totale qui agit sur le corps T .

SCHOLIE.

Comme la description des aires égales en temps égaux marque que le corps qui décrit ces aires éprouve l'action d'une force qui agit sur lui, qui le retire du mouvement rectiligne, & qui le retient dans son orbite; pourquoi ne prendrions-nous pas dans la suite cette description égale des aires pour l'indice d'un centre autour duquel se fait tout mouvement circulaire dans des espaces non résistans?

PROPOSITION IV. THÉOREME IV.

Les corps qui parcourent uniformément différens cercles sont animés par des forces centripètes qui tendent au centre de ces cercles, & qui sont entr'elles comme les quarrés des arcs décrits en temps égal, divisés par les rayons de ces cercles.

Ces forces tendent au centre des cercles par la Proposition 2. & le Corollaire 2. de la Proposition 1. & elles sont entr'elles, par

le Corollaire 4. de la Proposition 1. comme les sinus versés des arcs décrits dans de très petits temps égaux, c'est-à-dire par le Lemme 7. comme les quarrés de ces mêmes arcs divisés par les diamètres de leurs cercles. Or, comme ces petits arcs sont proportionnels aux arcs décrits dans des temps quelconques égaux, & que les diamètres sont comme les rayons, les forces seront comme les quarrés des arcs quelconques décrits dans des temps égaux divisés par les rayons. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Comme ces arcs sont proportionnels aux vitesses des corps, les forces centripètes seront en raison composée de la raison doublée des vitesses directement, & de la raison simple des rayons inversement.

Cor. 2. Et comme les temps périodiques sont en raison composée de la raison directe des rayons, & de la raison inverse des vitesses; les forces centripètes seront en raison composée de la raison directe des rayons, & de la raison doublée inverse des temps périodiques.

Cor. 3. Donc, si les temps périodiques sont égaux, & que les vitesses soient par conséquent comme les rayons; les forces centripètes seront aussi comme les rayons: & au contraire.

Cor. 4. Si les temps périodiques & les vitesses sont en raison sousdoublée des rayons; les forces centripètes seront égales entre elles: & au contraire.

Cor. 5. Si les temps périodiques sont comme les rayons, & que par conséquent les vitesses soient égales, les forces centripètes seront en raison renversée des rayons: & au contraire.

Cor. 6. Si les temps périodiques sont en raison sesquiplée des rayons, & que par conséquent les vitesses soient réciproquement en raison sousdoublée des rayons; les forces centripètes seront réciproquement comme les quarrés des rayons: & au contraire.

Cor. 7. Et généralement, si le temps périodique est comme une puissance quelconque R^n du rayon, & que par conséquent la

vitesse soit réciproquement comme la puissance R^{n-1} du rayon ; la force centripète sera réciproquement comme la puissance R^{2n-1} du rayon : & au contraire.

Cor. 8. On peut trouver de la même manière tout ce qui concerne les temps, les vitesses & les forces avec lesquelles les corps décrivent des parties semblables de figures quelconques semblables, qui ont leurs centres posés de même dans ces figures ; il ne faut pas pour ces cas d'autres démonstrations que les précédentes, pourvu qu'on substitue la description égale des aires au mouvement uniforme, & qu'on mette les distances des corps aux centres à la place des rayons.

Cor. 9. Il suit aussi de la même démonstration, que l'arc qu'un corps décrit pendant un temps quelconque en tournant uniformément dans un cercle en vertu d'une force centripète donnée, est moyen proportionnel entre le diamètre de ce cercle & la ligne que le corps parcoureroit en tombant par la même force donnée & pendant le même temps.

S C H O L I E.

Le cas du Corollaire 6. est celui des corps célestes, (comme nos Compatriotes *Hook*, *Wren* & *Halley* l'ont chacun conclu des observations) c'est pourquoi j'expliquerai fort au long dans la suite de cet Ouvrage tout ce qui a rapport à la force centripète qui décroît en raison doublée des distances au centre.

De plus, par la Proposition précédente & par ses Corollaires, on peut trouver la proportion qui est entre la force centripète & une force quelconque connue, telle que la gravité ; car si le corps tourne dans un cercle concentrique à la terre par la force de la gravité, la gravité sera sa force centripète : or, connoissant d'un côté la descente des graves, & de l'autre le temps de la révolution, & l'arc décrit dans un temps quelconque, on aura par le Corollaire 9. de cette Proposition la proportion cherchée entre la gravité & la force centripète. C'est par des propositions semblables

bles que M. *Hugens*, dans son excellent *Traité de Horollogie oscillatorio*, a comparé la force de la gravité avec les forces centrifuges des corps qui circulent.

On pourroit encore démontrer cette proposition de cette manière. Soit supposé un Polygone d'un nombre de côtés quelconques inscrit dans un cercle. Si le corps, en parcourant les côtés de ce Polygone avec une vitesse donnée, est réfléchi par le cercle à chacun des angles de ce Polygone, la force avec laquelle ce corps frappe le cercle à chaque réflexion sera comme sa vitesse : donc la somme des forces en un temps donné sera comme cette vitesse multipliée par le nombre des réflexions, c'est-à-dire, (si le Polygone est donné d'espece) comme la ligne parcourue dans ce temps, laquelle doit être augmentée ou diminuée dans la raison qu'elle a elle-même au rayon de ce cercle ; c'est-à-dire, comme le quarré de cette ligne divisé par le rayon : ainsi si les côtés du Polygone diminuant à l'infini, le Polygone vient à coïncider enfin avec le cercle, la somme des forces sera alors comme le quarré de l'arc parcouru dans un temps donné divisé par le rayon. C'est là la mesure de la force centrifuge avec laquelle le corps presse le cercle ; & cette force est égale & contraire à la force par laquelle ce cercle repousse continuellement le corps vers le centre.

PROPOSITION V. PROBLÈME I.

Trouver le point auquel tendent comme centre des forces qui font parcourir une courbe donnée, lors qu'on connoît la vitesse du corps à chaque point de cette courbe.

Que les lignes PT , TQV , VR , qui se rencontrent aux points T & V , touchent la courbe donnée dans les points P , Q , R , que l'on mene ensuite par ces points & perpendiculairement aux tangentes les droites PA , QB , RC , réciproquement proportionnelles aux vitesses dans les mêmes points ; c'est-à-dire, de sorte que PA soit à QB comme la vitesse au point Q est à la vitesse au point P , & que QB soit à RC comme la vitesse au point R à la vitesse

Fig. 14.

au point Q . Cela fait, soient menées à angles droits par les extrémités A, B, C , de ces perpendiculaires les lignes AD, DBE, EC , qui se rencontrent en D & en E ; & en tirant les lignes TD, VE , elles se rencontreront au centre cherché S .

Car les perpendiculaires tirées du centre S aux tangentes PT, QT sont (par le Cor. 1. de la Prop. 1.) réciproquement comme les vitesses du corps aux points P & Q ; donc par la construction elles seront comme les perpendiculaires AP, BQ directement, c'est-à-dire, comme les perpendiculaires abaissées du point D sur ces tangentes. D'où l'on tire facilement, que les points S, T, D sont dans une même ligne droite. On prouvera par le même raisonnement que les points S, E, V sont aussi dans une même ligne droite; donc le centre S se trouvera dans l'intersection des lignes TD, VE . C. Q. F. D.

PROPOSITION VI. THÉORÈME V.

Si un corps décrit autour d'un centre immobile un orbe quelconque dans un espace non résistant, & qu'on suppose que la flèche de l'arc naissant que ce corps parcourt dans un temps infiniment petit, & qui partage sa corde en deux parties égales, passe, étant prolongée par le centre des forces: la force centripète dans le milieu de l'arc sera en raison directe de cette flèche, & en raison doublée inverse du temps.

Par le Cor. 4. de la Prop. 1. la flèche dans un temps donné est comme la force; donc, en augmentant le temps en une raison quelconque, la flèche (par les Cor. 2. & 3. du Lemme 11.) augmentera dans la raison doublée du temps; car l'arc augmente en même raison que le temps, donc la flèche est en raison simple de la force, & en raison doublée du temps, & soustrayant de part & d'autre la raison doublée du temps, la force sera en raison directe de la flèche, & en raison doublée inverse du temps. C. Q. F. D.

On pourroit aussi démontrer facilement cette Proposition par le Cor. 4. du Lemme 10.

Cor. 1. Si le corps P en tournant autour du centre S décrit la courbe APQ , & que cette courbe soit touchée par la ligne ZPR en un point quelconque P , que d'un autre point quelconque Q de cette courbe, on tire QR parallèle à SP , & qu'on abaisse QT perpendiculaire sur SP : la force centripète sera réciproquement comme la quantité que devient $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$ lorsque les points P & Q coïncident; car QR est égale à la flèche de l'arc double de QP , dont le milieu est P , & le double du triangle SQP ou $SP \times QT$ est proportionnel au temps dans lequel cet arc double est décrit; ainsi on peut l'écrire à la place de ce temps.

Fig. 15.

Cor. 2. On prouvera par le même raisonnement que la force centripète est réciproquement comme la quantité $\frac{SY^2 \times QP^2}{QR}$ pourvu que SY soit abaissée perpendiculairement du centre des forces sur la tangente PR de l'orbite; car les rectangles $SY \times QP$ & $SP \times QT$ sont égaux.

Cor. 3. Si l'orbe PQ est un cercle dont la droite PV , qui passe par le corps & par le centre des forces, soit une corde, ou que cet orbe PQ ait pour cercle osculateur le cercle dont la corde est PV , la force centripète sera réciproquement comme la quantité $SY^2 \times PV$; car dans cette supposition $PV = \frac{QP^2}{QR}$

Cor. 4. Les mêmes choses étant posées, la force centripète est dans la raison doublée directe de la vitesse, & dans la raison inverse de la corde PV ; car par le *Cor. 1.* de la *Propos. 1.* la vitesse est réciproquement comme la perpendiculaire SY .

Cor. 5. Donc, si on a une figure curviligne quelconque APQ , & dans cette figure un point donné S , vers lequel la force centripète soit perpétuellement dirigée, on pourra trouver la loi de la force centripète, par laquelle un corps quelconque P sera retiré à tout moment du mouvement rectiligne & retenu dans

DU
MOUVEMENT
DES CORPS.

le périmètre de cette figure, en cherchant la valeur du solide $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$, ou celle du solide $SY^2 \times PV$, qui sont réciproque-

ment proportionnels à cette force. Nous en donnerons des exemples dans les Problèmes suivans.

PROPOSITION VII. PROBLÈME II.

Trouver la loi de la force centripete qui tend à un point donné, & qui fait décrire à un corps la circonférence d'un cercle.

Fig. 16.

Soient $VQPA$ la circonférence du cercle; S le point donné vers lequel la force fait tendre le corps comme à son centre; P un lieu quelconque où l'on suppose le corps arrivé; Q le lieu consécutif; PRZ la tangente du cercle au point P ; & PV la corde qui passe par S . Soient de plus VA le diamètre qui passe par V ; AP la corde tirée de A à P ; QT une perpendiculaire à PV , laquelle étant prolongée rencontre la tangente PR en Z ; RL la parallèle à PV qui passe par Q , & qui rencontre le cercle en L , & la tangente PZ en R .

Cela posé, à cause des triangles semblables ZQR , ZTP , VPA ; on aura RP^2 , c'est-à-dire, $QR \times RL : QT^2 :: AV^2 : PV^2$; donc $\frac{QR \times RL \times PV^2}{AV^2} = QT^2$; multipliant présentement cette équation

par $\frac{SP^2}{QR}$, & écrivant PV au lieu de RL , ce qui est permis lors-

que les points P & Q coïncident, on aura $\frac{SP^2 \times PV^3}{AV^2} = \frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$

donc, par les Corol. 1. & 5. de la Prop. 6. la force centripete sera

réciproquement comme $\frac{SP^2 \times PV^3}{AV^2}$ c'est-à-dire, à cause que AV^2

est donné, réciproquement comme le quarré de la distance ou hauteur SP multipliée par le cube de la corde PV . C. Q. F. T.

AUTRE SOLUTION.

Soit menée la perpendiculaire SY sur la tangente PR prolongée; à cause des triangles semblables SYP , VPA , on aura

$AV:PV::SP:SY$. Donc $\frac{SP \times PV}{AV} = SY$, & $\frac{SP^2 \times PV^2}{AV^2}$
 $= SY^2 \times PV$. Donc par les Cor. 3. & 5. de la Prop. 6. la force cen-
 tripete est réciproquement comme $\frac{SP^2 \times PV^2}{AV^2}$, c'est-à-dire, à
 cause que AV est donnée, réciproquement comme $SP^2 \times PV^2$
 C. Q. F. T.

Cor. 1. Donc, si le point donné S , auquel la force centripete
 tend sans cesse, se trouve dans la circonférence de ce cercle,
 comme en V ; la force centripete sera réciproquement, comme la
 cinquième puissance de la hauteur SP .

Cor. 2. La force par laquelle le corps P décrit le cercle $APT V$
 autour du centre S des forces, est à la force par laquelle ce même
 corps P peut tourner dans le même tems périodique & dans le
 même cercle autour d'un autre centre quelconque de forces R ,
 comme $SP \times RP^2$ à SG^3 , SG étant une droite menée paral-
 lelement à RP , & terminée par la tangente PG . Fig. 17.

Car par la construction, la première force est à la dernière
 comme $RP^2 \times PT^3$ à $SP^2 \times PV^3$ c'est-à-dire, comme $SP \times PR^2$ à
 $\frac{SP^3 \times PV^3}{PT^3}$, ou bien, à cause des triangles semblables PSG, TPV ,
 comme $SP \times PR^2$ à SG^3 .

Cor. 3. La force par laquelle le corps P circule dans un orbe
 quelconque autour d'un centre de forces S , est à la force, par
 laquelle ce même corps P peut circuler dans le même temps pé-
 riodique & dans le même orbe autour d'un autre centre quelcon-
 que R de forces, comme $SP \times RP^2$ à SG^3 , c'est-à-dire, comme
 la distance du corps au premier centre des forces S , multipliée par
 le carré de la distance au second centre R , est au cube de la ligne
 SG tirée du premier centre S parallèlement à la distance du se-
 cond centre, & terminée par la tangente PG de l'orbite. Car les
 forces dans cet orbe sont les mêmes à un de ses points quelconques
 P , que dans le cercle qui a la même courbure.

PROPOSITION VIII. PROBLÈME III.

DU
MOUVEMENT
DES CORPS.

On demande la loi de la force centripète dans le cas où le corps décrivant un demi-cercle PQA tend continuellement vers un point S si éloigné, que toutes les lignes PS, RS tirées à ce point peuvent être regardées comme parallèles.

Fig. 18.

Par le centre C de ce demi cercle, soit tiré le demi diamètre CA coupé perpendiculairement en M & en N par les directions de la force centripète. Tirant CP, on aura, à cause des triangles semblables, CPM, PZT & RZQ, $CP^2 : PM^2 :: PR^2 : QT^2$ & par la nature du cercle $PR^2 = QR \times RN + QN =$ (les points Q & P coïncidant) $QR \times 2 PM$. Donc $CP^2 : PM^2 :: QR \times 2 PM : QT^2$ donc $\frac{QT^2}{QR} = \frac{2PM^3}{CP^2}$ & $\frac{QT^2 \times SP^2}{QR} = \frac{2PM^3 \times SP^2}{CP^2}$; donc, par les Corol. 1. & 5. de la Prop. 6. la force centripète est réciproquement comme $\frac{2PM^3 \times SP^2}{CP^2}$, c'est-à-dire (en négligeant la raison déterminée de $\frac{2SP^2}{CP^2}$) réciproquement comme PM^3 .
C. Q. F. T.

On tireroit facilement la même chose de la Proposition précédente.

S C H O L I E.

Par un raisonnement à peu près semblable, on trouveroit que si le corps décrivait une ellipse, une hyperbole, ou une Parabole, en vertu d'une force centripète dirigée à un point très-éloigné, cette force centripète seroit encore réciproquement comme le cube de l'ordonnée qui tend à ce point.

PROPOSITION IX. PROBLÈME IV.

Supposé que le corps tourne dans une spirale PQS qui coupe tous les rayons SP, SQ, &c. sous un angle donné : on demande la loi de la force centripète qui tend au centre de cette spirale.

Fig. 19.

Soit supposé constant l'angle indéfiniment petit PSQ, la figure

$SPRQT$, ayant tous ses angles constans, sera donnée d'espece;

donc $\frac{QT}{QR}$ sera donnée aussi; donc $\frac{QT^2}{QR}$ sera comme SP , parce-

LIVRE
PREMIER.

que, comme on vient de le dire, $SPRQT$ est donnée d'espece.

Supposons présentement que l'angle PSQ change selon une loi quelconque, la droite QR qui soutient l'angle de contact QPR changera, par le Lemme 11. en raison doublée de PR ou de QT . De-là il suit, que la raison de $\frac{QT^2}{QR}$ demeurera la même

qu'auparavant, c'est-à-dire qu'elle sera encore comme SP . C'est pourquoi $\frac{QT^2 \times SP^2}{QR}$ sera comme SP^3 ; donc par les Corol. 1.

& 5. de la Prop. 6. la force centripete sera réciproquement proportionnelle au cube de la distance SP . C. Q. F. T.

AUTRE SOLUTION.

La perpendiculaire SY abaissée sur la tangente, & la corde PV du cercle osculateur étant en raison donnée avec SP , SP^3 est proportionnel à $SY^2 \times PV$, c'est-à-dire, par les Cor. 3. & 5. de la Prop. 6. réciproquement proportionnel à la force centripete.

LEMME XII.

Tous les parallélogrammes décrits autour des diametres quelconques conjugués d'une ellipse ou d'une hyperbole donnée sont égaux entr'eux.

Cette Proposition est claire par les Coniques.

PROPOSITION X. PROBLÈME V.

Un corps circulant dans une ellipse : on demande la loi de la force centripete qui tend au centre de cette ellipse.

Soient CA, CB les demi axes de l'ellipse; GP, DK d'autres diametres conjugués; PF, QT des perpendiculaires à ces diametres; Qv une ordonnée au diametre GP ; si on acheve le parallélogramme $QvPR$, on aura par les coniques $Pv \times vG : Qv^2 ::$

Fig. 20.

$PC^2 : CD^2$. Mais à cause des triangles semblables QvT, PCF ,
 $Qv^2 : QT^2 :: PC^2 : PF^2$. Donc, en composant ces raisons, on aura

$$Pv \times vG : QT^2 :: PC^2 : CD^2, \& PC^2 : PF^2, \text{ ou } vG : \frac{QT^2}{Pv} ::$$

$$PC^2 : \frac{CD^2 \times PF^2}{PC^2}. \text{ Si on écrit présentement } QR \text{ pour } Pv, \text{ que}$$

l'on mette, à cause du Lemme 12. $BC \times CA$ à la place de $CD \times PF$, & que l'on suppose vG égale à $2PC$, ainsi qu'on le doit lorsque les points P & Q coïncident, on aura, en multipliant les extrêmes & les moyens, $\frac{QT^2 \times PC^2}{QR} = \frac{2BC^2 \times CA^2}{PC}$. Donc,

par le Cor. 5. de la Prop. 6. la force centripète sera réciproquement comme $\frac{2BC^2 \times CA^2}{PC}$; c'est-à-dire, à cause que $2CB^2 \times CA^2$

est donnée, réciproquement comme $\frac{1}{PC}$; ou, ce qui revient au même, directement comme la distance PC . C. Q. F. T.

AUTRE SOLUTION.

Sur la droite PG de l'autre côté du point T par rapport à F , soit pris le point u en sorte que $Tu = Tv$. Soit pris ensuite uV à vG , comme DC^2 à PC^2 . Puisque les coniques donnent $Qv^2 : Pv \times vG :: DC^2 : PC^2$, on aura $Qv^2 = Pv \times uV$, & ajoutant le rectangle $uP \times Pv$ de part & d'autre, il est clair que le carré de la corde de l'arc PQ sera égal au rectangle $VP \times Pv$; donc le cercle qui touche la section conique en P & qui passe par le point Q passera aussi par le point V . Supposez à présent que les points P & Q se confondent, la raison de uV à vG , qui est la même que la raison de DC^2 à PC^2 , deviendra la raison de PV à PG ou de PV à $2PC$; donc $PV = \frac{2DC^2}{PC}$, donc, par le Cor. 3. de la Prop. 6. la force par laquelle le corps P fait sa révolution dans l'ellipse, sera réciproquement comme $\frac{2DC^2}{PC} \times PF^2$, c'est-à-dire,

à cause que $2 DC^2 \times PF^2$ est donné, que cette force sera directement comme PC . C. Q. E. T.

LIVRE
PREMIER.

Cor. 1. La force est donc comme la distance du corps au centre de l'ellipse : & réciproquement, si la force est comme la distance, le corps décrira ou une ellipse dont le centre sera le même que le centre des forces, ou le cercle dans lequel l'ellipse peut se changer.

Cor. 2. Les temps périodiques des révolutions qui se font autour du même centre sont égaux dans toutes les ellipses; car ces temps sont égaux dans les ellipses semblables (par les Cor. 3. & 8. de la Prop. 4.) ; mais dans les ellipses qui ont le grand axe commun, ils sont les uns aux autres directement comme les aires elliptiques totales, & inversement comme les particules de ces aires décrites en temps égal, c'est-à-dire directement comme les petits axes, & inversement comme les vitesses des corps dans les sommets principaux, ou directement comme les petits axes, & inversement comme les ordonnées au même point de l'axe commun. Mais ces deux raisons directes & inverses qui composent la raison des temps sont alors égales; donc les temps sont égaux.

SCHOLIE.

Si le centre de l'ellipse s'éloigne à l'infini, & qu'elle devienne une parabole, le corps se mouvra dans cette parabole; & la force tendant alors à un centre infiniment distant, elle deviendra uniforme. C'est le cas traité par Galilée. Si (en changeant l'inclinaison du plan au cône coupé) la parabole se change en une hyperbole, le corps se mouvra dans le périmètre de cette hyperbole, la force centripète se changeant alors en force centrifuge; & de même que dans le cercle ou l'ellipse, si les forces tendent au centre de la figure placé sur l'abscisse, en augmentant ou diminuant les ordonnées en une raison donnée quelconque, ou en changeant l'angle d'inclinaison des ordonnées sur l'abscisse, ces forces augmenteront ou diminueront toujours en raison des dis-

tances au centre, pourvu que les temps périodiques demeurent égaux : ainsi dans toutes les courbes, si les ordonnées augmentent ou diminuent dans une raison donnée quelconque, ou que l'angle de ces ordonnées change d'une façon quelconque, le temps périodique & le centre des forces, qu'on suppose placé à volonté sur l'abscisse, demeurans les mêmes, les forces centripètes aux extrémités des ordonnées correspondantes seront entr'elles comme les distances au centre.

TROISIÈME SECTION.

Du mouvement des corps dans les Sections coniques excentriques.

PROPOSITION XI. PROBLÈME VI.

Un corps faisant sa révolution dans une ellipse ; on demande la loi de la force centripète, lorsqu'elle tend à un de ses foyers.

Fig. 21.

Soient S le foyer de l'ellipse, E la rencontre de SP avec le diamètre DK , & celle de la même ligne SP avec l'ordonnée QV , $QxPR$ le parallélogramme fait sur Px & Qx . On voit d'abord que EP est égale au demi grand axe AC ; car menant par l'autre foyer H la droite HI parallèle à DK , il est clair que EI sera égale à SE à cause de l'égalité qui est entre CH & CS , & par conséquent PE sera égale à la moitié de la somme de PI & de PS , ou, ce qui revient au même, à AC , moitié de la somme de PS & de PH , puisqu'il s'agit de ce que HI est parallèle à RP , & de ce que les angles HPZ & IPR sont égaux, que $HP = PI$. Abaisant ensuite QT perpendiculaire à SP , & nommant L le paramètre du grand axe, c'est-à-dire $\frac{2BC^2}{AC}$, on verra que $L \times QR : L \times Pv :: QR : Pv$, c'est-à-dire PE ou $AC : PC$; mais $L \times Pv : Gv \times vP :: L : Gv$ & $Gv \times vP : Qv^2 :: PC^2 : CD^2$; de plus, $Qv^2 : Qx^2$ en raison d'égalité (Cor. 2. Lem. 7.)

